

Экстремальные задачи упаковок кругов на сфере и неприводимые контактные графы

О. Р. Мусин*, А. С. Тарасов

Аннотация

Недавно, с точностью до изометрии, нами были перечислены все локально-жесткие упаковки конгруэнтных кругов (сферических шапочек) на единичной сфере с числом кругов $N < 12$. Эта задача эквивалентна перечислению сферических неприводимых контактных графов. В этой статье мы показываем, что с помощью списка неприводимых контактных графов можно решать различные задачи об экстремальных упаковках таких как задача Таммеса для сферы и проективной плоскости, задача о наибольшем числе контактов у сферических упаковок, задачи Данцера и другие задачи о неприводимых контактных графах.

1 Введение

Упаковка шаров в пространстве называется *жесткой* или, иногда, *локально-жесткой*, если они расположены так, что каждый шар из упаковки зажат соседями и его нельзя сдвинуть в сторону с тем, чтобы увеличить минимальное расстояние между центром этого шара и центрами других шаров.

Рассмотрим N не пересекающихся шаров одинакового радиуса r в \mathbb{R}^3 , которые расположены так, что все они касаются одного (центрального) шара единичного радиуса. Обозначим через $P := \{A_1, \dots, A_N\}$ точки касания внешними шарами центрального шара. Соединим точки A_i и A_j ребром (минимальной дугой большого круга), если соответствующие внешние шары касаются. Полученный граф будем называть *контактным* и обозначать $CG(P)$. Если же эта упаковка на \mathbb{S}^2 является локально-жесткой, то будем называть граф $CG(P)$ *неприводимым*. Таким образом, задача изучения жестких упаковок локально сводится к изучению неприводимых графов.

Имеется связь этой геометрической задачи с другими задачами упаковки шаров. Одно из основных приложений вне математики - это материаловедение, где рассматриваются локально-жесткие упаковки твердыми телами и наночастицами (см. например, [3, 11, 17]). Заметим также, что большинство конфигураций физических частиц, задающих минимум потенциальной энергии тоже являются локально-жесткими.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 13-01-12458 и гранта NSF DMS-1400876

В математике - В. Хабиht, К. Шютте, Б. Л. ван дер Варден, и Л. Данцер применяли неприводимые контактные графы к проблеме контактных чисел и проблеме Таммеса [16, 32, 35, 33, 12]. Недавно с помощью этого метода мы решили проблему Таммеса для $N = 13$ и $N = 14$ [27, 29].

В этой статье мы показываем, что с помощью списка неприводимых контактных графов можно решать различные задачи об экстремальных упаковках. Здесь мы рассматриваем задачи Таммеса для сферы и проективной плоскости, задачу о наибольшем числе ребер у сферического контактного графа, задачи Данцера и другие.

2 Неприводимые контактные графы

2.1 Основные определения

Обозначим через \mathbb{S}^2 единичную сферу в \mathbb{R}^3 . Для точек x и y на сфере, $\text{dist}(x, y)$ - это расстояние в угловом измерении.

Пусть X - конечное подмножество единичной сферы \mathbb{S}^2 . Обозначим

$$\psi(X) := \min_{x, y \in X} \{\text{dist}(x, y)\}, \text{ где } x \neq y.$$

Пусть d_N обозначает наибольшее значение $\psi(X)$, которое может достигаться для $X \subset \mathbb{S}^2$ с $|X| = N$, т. е.

$$d_N := \max_{X \subset \mathbb{S}^2} \{\psi(X)\}, \text{ при } |X| = N.$$

Контактные графы. Как и выше, X - конечное подмножество \mathbb{S}^2 . *Контактным графом* $\text{CG}(X)$ называется граф на \mathbb{S}^2 с вершинами в X и ребрами (дугами) xy , $x, y \in X$, минимальной длины, т. е. с $\text{dist}(x, y) = \psi(X)$.

Сдвиг вершины. Будем говорить, что вершину $x \in X$ можно *сдвинуть в сторону*, если в любой открытой окрестности x найдется такая точка $x' \in \mathbb{S}^2$, что

$$\text{dist}(x', X \setminus \{x\}) > \text{dist}(x, X \setminus \{x\}).$$

Неприводимые графы. Назовем контактный граф $\text{CG}(X)$ *неприводимым*, если ни одну из его вершин нельзя сдвинуть в сторону. Этот термин используется в работах [32, 33, 14, 12].

Давайте обозначим через J_N семейство всех конечных множеств X в \mathbb{S}^2 с $|X| = N$ таких что $\text{CG}(X)$ является неприводимым.

Д-неприводимые графы. Л. Данцер [12, Sec. 1] определил следующую операцию. Пусть x, y, z - вершины $\text{CG}(X)$ с $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(x, z) = \psi(X)$. Обозначим через x^0 зеркальный образ точки x относительно дуги большого круга yz (см. Рис. 1). Мы назовем эту операцию *Д-отражением*, если $\text{dist}(x^0, X \setminus \{x, y, z\}) > \psi(X)$.

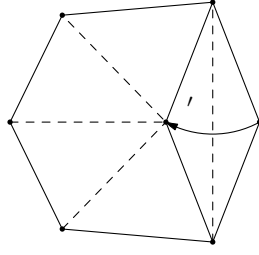


Рис. 1: Д-отражение

Неприводимый контактный граф $\text{CG}(X)$ будем называть Д-неприводимым, если он не допускает ни одного Д-отражения.

Максимальные графы. Предположим, что для $X \subset \mathbb{S}^2$ с $|X| = N$ имеет место равенство $\psi(X) = d_N$. Будем тогда называть контактный граф $\text{CG}(X)$ - *максимальным*.

2.2 Свойства неприводимых контактных графов.

Здесь мы рассмотрим такие подмножества $X \subset \mathbb{S}^2$, что граф $\text{CG}(X)$ является неприводимым, т.е. $X \in J_N$. Следующие свойства неприводимых графов были опубликованы в работах [32], [12], и [6, 7] (см. также [14, Глава VI]).

Пусть $a, b, x, y \in X$ с $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(x, y) = \psi(X)$. Тогда кратчайшие дуги ab и xy не пересекаются. В противном случае, длина одной из дуг ax, ay, bx, by будет меньше чем $\psi(X)$. Из этого вытекает

Предложение 2.1. *Если X - конечное подмножество \mathbb{S}^2 , то $\text{CG}(X)$ является планарным графом.*

Предложение 2.2. *Если $X \in J_N$, то все грани $\text{CG}(X)$ являются выпуклыми в \mathbb{S}^2 .*

Предложение 2.3. *Если X является максимальным, то для $N > 5$ граф $\text{CG}(X)$ является Д-неприводимым и, в частности, неприводимым.*

Предложение 2.4. *Если $X \in J_N$, то степени вершин графа $\text{CG}(X)$ могут быть только 0 (изолированные вершины), 3, 4, или 5.*

Предложение 2.5. *Если $X \in J_N$, то грани $\text{CG}(X)$ являются многоугольниками не более чем с $\lfloor 2\pi/\psi(X) \rfloor$ вершинами.*

Следующее свойство было найдено Бёрёцким и Сабо [6, Lemma 8 and Lemma 9(iii)].

Предложение 2.6. *Пусть $X \in J_N$, $N > 10$. Если $\text{CG}(X)$ содержит изолированные вершины, то эти вершины лежат внутри граней $\text{CG}(X)$ с шестью или более вершинами. Более того, внутри шестиугольника не может лежать две изолированные вершины.*

Комбинируя эти предложения вместе, получаем следующие комбинаторные свойства неприводимых контактных графов:

Следствие 2.1. *Если $X \in J_N$, то $G := \text{CG}(X)$ удовлетворяет следующим свойствам*

1. *G является планарным графом;*
2. *У любой вершины G степень равна 0, 3, 4, или 5;*
3. *Если $N > 10$ и у G есть изолированная вершина v , то v лежит в грани с $m \geq 6$ вершинами. Гексагональная грань G не может содержать две изолированные вершины.*

2.3 Работа Л. Данцера по неприводимым графам

В работе [12] Людвиг Данцер приводит решение проблемы Таммеса для $N = 10$ и $N = 11$. Эта статья - английский перевод его докторской диссертации: “Endliche Punktmengen auf der 2-sphäre mit möglichst großem Minimalabstand”, Universität Göttingen, 1963. В этой работе, в частности, к понятию приводимости было добавлено понятие Д-отражения и Д-приводимости. (В статье применяется другая терминология и мы используем здесь Д в честь Л. Данцера.)

В своей работе [12] Данцер также приводит список Д-неприводимых графов для $6 \leq N \leq 10$. Так как максимальные контактные графы являются Д-неприводимыми, то в этот список включены и графы, дающие решение проблемы Таммеса для этих n . Заметим, что для случая $N = 11$ Данцер рассматривал только максимальные контактные графы.

2.4 Перечисление неприводимых контактных графов

Пусть конечное множество точек $X \subset \mathbb{S}^2$ такое, что контактный граф $\text{CG}(X)$ является неприводимым. В Следствии 2.1 мы собрали вместе комбинаторные свойства $\text{CG}(X)$. Имеется целый ряд геометрических свойств этих графов.

Напомним, что все грани $\text{CG}(X)$ являются выпуклыми (Предложение 2.2). Поскольку все ребра $\text{CG}(X)$ одинаковой длины $\psi(X)$, то его грани - выпуклые равносторонние сферические многоугольники с числом вершин не превосходящим $\lfloor 2\pi/\psi(X) \rfloor$.

Рассмотрим теперь планарный граф G , с заданными гранями $\{F_k\}$, который удовлетворяет Следствию 2.1. Мы будем рассматривать вложения этого графа в \mathbb{S}^2 как неприводимого контактного графа $\text{CG}(X)$ для некоторого $X \subset \mathbb{S}^2$.

Вложение графа G в \mathbb{S}^2 однозначно задается следующим набором параметров (переменных):

- (i) Длина ребра d ;
- (ii) Наборы углов u_{ki} , $i = 1, \dots, m_k$ граней F_k . (Здесь m_k обозначает число вершин у грани F_k .)

В нашей работе по перечислению графов были рассмотрены основные геометрические соотношения между этими параметрами ([28, Предложение 4.1]).

Алгоритм перечисления неприводимых контактных графов состоит из двух частей: (I) На первом этапе составляется список L_N , состоящий из всех графов с N вершинами и удовлетворяющий Следствию 2.1;

Чтобы создать список L_N мы используем программу *plantri* (см. [10, 30]). Эта программа является генератором не изоморфных планарных графов различных классов, включая триангуляции и другие разбиения на выпуклые многоугольники.

Заметим, что число графов в L_N с ростом N быстро возрастает. Например, при $N = 6, 7, 8$, $|L_N| = 7, 34, 257$, а уже $|L_{13}| = 94754965$

(II) Используя линейную аппроксимацию соотношений из [28, Предложения 4.1], из L_N удаляются все графы, которые не могут быть вложены в сферу. Оставшиеся графы после дополнительной проверки с помощью солверов и оценки границ изменения параметров заносятся в список неприводимых контактных графов.

Основной результат работы [28] приведен в Приложении.

3 Контактные числа и проблема Таммеса

3.1 Контактные числа

Контактным числом $k(n)$ называют наибольшее число не пересекающихся шаров одинакового радиуса в \mathbb{R}^n , которые можно расположить так, чтобы все они касались одного (центрального) шара такого же радиуса.

Очевидно, что $k(2) = 6$. В трехмерном пространстве, в задаче о контактных числах спрашивается: “Как много белых бильярдных шаров могут одновременно касаться черного бильярдного шара?”

Наиболее симметричная конфигурация, 12 бильярдных шаров вокруг одного, это когда центры 12 шаров расположены в вершинах правильного икосаэдра, а центральный шар расположен в центре икосаэдра. Однако, эти 12 внешних шаров не касаются друг друга и могут свободно перемещаться по поверхности центрального шара. Таким образом, возможно, что эти 12 шаров можно сдвинуть в одну сторону, так что найдется место для 13-го шара?

Этот вопрос был предметом спора между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 году. Ньютон считал, что $k(3) = 12$, в то время как Грегори думал, что ответ может быть равен 13. Эту задачу Ньютона - Грегори часто называют *проблемой тринадцати шаров*.

Несложно видеть, что проблема тринадцати шаров сводится к следующей задаче: *Доказать, что на единичной сфере \mathbb{S}^2 нельзя расположить 13 точек так, чтобы расстояния между ними были не меньше чем 60° в угловом измерении.*

Проблема тринадцати шаров оказалось достаточно трудной и была решена только в 1953 году. К. Шютте и Б.Л. Ван дер Варден [33] доказали, что Ньютон был прав

и $k(3) = 12$. Доказательство Шютте – ван дер Вардена основано на неприводимых контактных графах. Ими было показано, что на единичной сфере \mathbb{S}^2 не найдется контактного графа Γ с ребрами одинаковой длины, которая не меньше чем 60° .

В 1956 году Дж. Лич [19] напечатал двухстраничный набросок элегантного доказательства. Это доказательство было приведено в первом издании известной книги М. Айгнера и Г. Циглера “Доказательства из Книги” [1]. Однако эта глава была исключена из книги при втором издании, так как авторам не удалось привести подробное доказательство без громоздких вычислений, основанных на сферической тригонометрии. В последние 12 лет было опубликовано несколько новых решений этой старой проблемы [18, 20, 21, 5, 2, 23].

Заметим, что проблема контактных чисел решена только для размерностей $n = 3, 4, 8$ и 24 (см. [8, 22, 24, 25]). Доказательства в этих работах основаны на методе Дельсарта и его обобщениях.

3.2 Проблема Таммеса

У проблемы 13 шаров имеется естественное обобщение: найти расположение множества X , состоящего из N точек на \mathbb{S}^2 , такое что минимальное расстояние между точками X - максимально возможное. Эту задачу впервые поставил голландский ботаник Таммес [34] (см. также [9, Section 1.6: Problem 6]).

Задача Таммеса решена только для нескольких значений N : для $N = 3, 4, 6, 12$ ее решил Л. Фейеш Тот [13]; для $N = 5, 7, 8, 9$ - Шютте и ван дер Варден [32]; для $N = 10, 11$ - Данцер [12] (для $N = 11$ см. также [4]) и для $N = 24$ - Робинсон [31]. Недавно мы решили эту задачу для $N = 13$ [27] и для $N = 14$ [29].

В работе Л. Фейеша Тота [13] (см. также его книгу [14]) была найдена верхняя оценка для d_N . (Напомним, что d_N обозначает наибольшее значение $\psi(X)$, которое может достигаться для $X \subset \mathbb{S}^2$ с $|X| = N$.)

$$d_N \leq \arccos \frac{\operatorname{ctg}^2 w_N - 1}{2}, \quad \text{где } w_N := \frac{\pi N}{6N - 12}.$$

Эта формула является точной для $N = 3, 4, 6, 12$ и решением проблемы Таммеса для этих N соответственно являются правильный треугольник на экваторе, правильный тетраэдр, правильный октаэдр и правильный икосаэдр.

Р. М. Робинсон [31] обобщил оценку Фейеша Тота и решил проблему Таммеса для $N = 24$.

Оказывается, что $d_5 = d_6 = 90^\circ$ [32, 14]. При $N = 5$ максимальное расположение на сфере не является единственным с точностью до изометрии. Если взять две точки расположенные в северном и южном полюсах сферы, а оставшиеся три точки расположить на экваторе так, чтобы (угловое) расстояния между ними было бы не меньше 90° , то получим максимальное расположение.

Для решения проблемы Таммеса при $7 \leq N \leq 11$ и при $N = 13, 14$ применялись неприводимые контактные графы. Заметим, что контактный граф у максимальной кон-

фигурации должен быть неприводимым. Поэтому, максимальный граф находится среди неприводимых контактных графов. Более того, он является D -неприводимым [12].

Можно значительно сократить перебор и список “допустимых” неприводимых графов, если добавить условие: $d \geq \delta_N$, где δ_N обозначает длину ребра у гипотетического максимального графа. (Собственно, проблема состоит в доказательстве равенства $d_N = \delta_N$.) Большой набор примеров имеется в книге [14, Глава VI, §4] и в таблице Н. Слоэна: <http://neilsloane.com/packings/dim3/>. В этой таблице приведены возможные максимальные конфигурации вплоть до $N = 130$.

Из Таблиц 7.1–7.6 в Приложении получаем следующую таблицу:

N	6	7	8	9	10	11
I_N	2	2	4	10	30	38

Здесь I_N обозначает число неприводимых контактных графов с N вершинами.

Поскольку, для $N = 7, 8, 9$ числа I_N не очень большие, то в работе [32] удалось отбросить неподходящие графы без особой суеты. При $N = 10$ число $I_N = 30$, что довольно много. В этом случае, также как и при $N = 11$, Л. Данцер рассматривал только D -неприводимые контактные графы. В наших работах по проблеме Таммеса для $N = 13$ [27] и для $N = 14$ [29] мы проводили компьютерный перебор подходящих, т. е. из списка L_N , D -неприводимых контактных графов.

Интересно, что $d_{11} = d_{12} = \arccos(1/\sqrt{5})$. Для $N = 11$ максимальная конфигурация получается из вершин правильного икосаэдра удалением одной из них.

Заметим, что во всех решенных случаях проблемы Таммеса, максимальное расположение оказалось единственным с точностью до изометрии. Можно, конечно, предположить, что так будет для всех N . Однако, в задаче, аналогичной проблеме Таммеса, для плоского тора (периодические упаковки конгруэнтных кругов) при $N = 7$ оказалось, что имеется три разные максимальные упаковки [26]. Это обстоятельство делает проблему Таммеса для сферы еще более интригующей.

В заключении этого раздела отметим, что прямой подход по решению проблемы Таммеса, основанный на компьютерном перечислении неприводимых контактных графов, т. е. такой как в наших работах [27, 29], себя практически исчерпал. Для $N = 15, 16, \dots$ компьютерный перебор может занимать многие месяцы. Здесь нужны новые подходы и идеи.

4 Проблема Таммеса для антиподальных конфигураций

Если рассмотреть сферу \mathbb{S}^d как множество единичных векторов x в \mathbb{R}^{d+1} , то точки x и $y = -x$ называются *антиподальными*, а отображение $x \rightarrow -x$ называется *антиподальным* на \mathbb{S}^d . Множество $X \subset \mathbb{S}^d$ называется *антиподальным*, если антиподальное отображение переводит X в себе, $X = -X$, иными словами, если $x \in X$, то и $-x \in X$.

Рассмотрим теперь проблему Таммеса для антиподальных множеств на \mathbb{S}^2 . Пусть X – антиподальное множество на сфере. Тогда X содержит четное число точек и, стало быть, $|X| = 2M$, $M = 1, 2, \dots$. Определим для таких множеств аналог величины d_N .

$$a_M := \max_{X=-X \subset \mathbb{S}^2} \{\psi(X)\}, \text{ при } |X| = 2M.$$

Проблема Таммеса для антиподальных множеств состоит в том, чтобы найти все конфигурации $X = \{x_1, -x_1, \dots, x_M, -x_M\}$ на \mathbb{S}^2 , чтобы $\psi(X) = a_M$.

Если отождествить на сфере \mathbb{S}^2 антиподальные точки, то получим проективную плоскость \mathbb{RP}^2 . Поэтому, по сути, эта проблема о конфигурациях на проективной плоскости у которых минимальное расстояние между точками является максимально возможным.

Рассмотрим простейшие свойства a_M и оптимальных конфигураций.

Лемма 4.1. 1. $a_M \leq d_{2M}$;

2. Если $|X| = 2M$, $\psi(X) = d_{2M}$ и X – антиподальное множество, то $a_M = d_{2M}$. Следовательно, если $X = -X$ и X является решением проблемы Таммеса для $N = 2M$, то X также является решением и задачи Таммеса для антиподальных конфигураций;

3. Если $X \subset \mathbb{S}^2$ – антиподальное множество, $|X| = 2M$ и $\psi(X) = a_M$, то $\text{CG}(X)$ является D -неприводимым контактным графом.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 вытекают непосредственно из определений.

3. Будем доказывать это утверждение от противного. Для антиподального множества X сдвиг вершины и D -отражение мы будем делать одновременно для вершины v и ее антипода $-v$, т. е. мы сохраняем антиподальность. Тогда, если конфигурация позволяет такую операцию, то сдвигая еще точки мы получим новое антиподальное X' у которого $\psi(X') > \psi(X)$, – противоречие. \square

Теорема 4.1. Пусть $X_M \subset \mathbb{S}^2$ является решением задачи Таммеса для антиподальных конфигураций, т. е. $\psi(X_M) = a_M$. Тогда

1. X_2 – множество вершин квадрата на экваторе, $a_2 = 90^\circ$;
2. X_3 – множество вершин правильного октаэдра, $a_3 = 90^\circ$;
3. X_4 – множества вершин куба, $a_4 = \arccos(1/3)$;
4. X_5 – множество, состоящее из пяти пар антиподальных вершин правильного икосаэдра, $a_5 = \arccos(1/\sqrt{5})$.
5. X_6 – множество вершин правильного икосаэдра, $a_6 = \arccos(1/\sqrt{5})$.

Доказательство. 1. В случае $M = 2$ у нас имеется две пары антиподальных точек и поэтому эти четыре точки лежат на большой окружности. Следовательно, вершины квадрата являются оптимальным расположением этих точек.

Пункты 2 и 5 теоремы вытекают из Леммы 4.1 (2).

Лемма 4.1 (3) позволяет выбрать X_M из списка неприводимых контактных графов. Таблицы 7.3 и 7.5 доказывают пункты 3 и 4 теоремы. \square

5 Задача о наибольшем числе контактов

Пусть X конечное множество в произвольном метрическом пространстве \mathbf{M} с расстоянием dist . Как и раньше,

$$\psi(X) := \min_{x, y \in X} \{\text{dist}(x, y)\}, \text{ где } x \neq y.$$

Обозначим через $e(X)$ число пар (x, y) в X у которых $\text{dist}(x, y) = \psi(X)$. (Иными словами, $e(X)$ это число ребер у графа $\text{CG}(X)$) Определим максимальное контактное число (число ребер) для заданного числа точек.

$$K(\mathbf{M}, N) := \max_{X \in \mathbf{M}, |X|=N} e(X).$$

В задаче о наибольшем количестве контактов спрашивается как найти числа $K(\mathbf{M}, N)$ или хотя бы оценить их?

В случае когда $\mathbf{M} = \mathbb{S}^2$ будем обозначать величину $K(\mathbf{M}, N)$ через K_N .

Это определение можно обобщить. Рассмотрим N не пересекающихся кругов (сферических шапочек) диаметра d на сфере \mathbb{S}^2 . Обозначим через $K_N(d)$ максимально возможное число касаний этих кругов.

Заметим, что

$$K_N = \max_{d \leq d_N} K_N(d).$$

В работе [15] рассматривалась эта задача для $N = 12$ и $d = 60^\circ$. Было доказано, что $K_N(d) = 24$.

Начнем с простейших свойств множеств с максимальным числом контактов.

Лемма 5.1. Пусть Γ_N обозначает контактный граф $\text{CG}(X)$ множества X на сфере, с $|X| = N$, у которого число ребер равно K_N . Тогда Γ_N является планарным графом и степень любой вершины этого графа равна 2, 3, 4 или 5.

Доказательство. Планарность следует из Предложения 2.1.

У графа Γ_N не может быть ни изолированных ($\deg(v) = 0$), ни висячих вершин ($\deg(v) = 1$), так как в противном случае мы можем придвинуть эту вершину к другим и увеличить число контактов до двух.

Неравенство $\deg(v) < 6$ следует из известного факта, что у равнобедренного сферического треугольника ABC с $|AB| = |AC| = d$ и $|BC| \geq d$ угол $\angle BAC > \pi/3 = 60^\circ$.

Предположим, что у вершины v , $\deg(v) \geq 6$. Тогда $60^\circ \deg(v) \geq 360^\circ$. С другой стороны, сумма углов при вершине v равна 360° , а поскольку каждый угол больше чем 60° , то $360^\circ > 60^\circ \deg(v)$, - противоречие. Отсюда вытекает требуемое неравенство. \square

Очевидно, что $K_2 = 1$. Для больших N имеет место следующее неравенство.

Теорема 5.1. *Пусть $N > 2$. Тогда*

$$K_N \leq 3N - 6$$

и равенство достигается только при $N = 3, 4, 6, 12$.

Доказательство. Рассмотрим контактный граф Γ_N с максимальным числом контактов. Пусть у Γ_N на сфере будет F граней. Тогда по формуле Эйлера получаем

$$N - K_N + F = 2.$$

Поскольку у каждой грани не менее трех сторон, то $F \leq 2K_N/3$. Из этого неравенства и формулы Эйлера вытекает требуемое.

Если $N = 3, 4, 6, 12$, то равенство соответственно достигается для правильного треугольника на экваторе, правильного тетраэдра, правильного октаэдра и правильного икосаэдра.

Заметим, что равенство получается только в том случае, если все грани вложения Γ_N на сферу являются конгруэнтными правильными сферическими треугольниками. Степени всех вершин должны быть равны. Но тогда при $N > 3$ вершины задают правильные многогранники с треугольными гранями. Известно, что всего у трех из пяти правильных многогранников грани треугольные и они перечислены выше. \square

Поскольку из теоремы следует, что $K_5 < 9$, то получаем следующее утверждение:

Следствие 5.1. $K_5 = 8$. *Такое число получается когда одна точка находится в “северном полюсе”, а оставшиеся четыре лежат на экваторе и образуют квадрат.*

Таким образом, мы знаем решение задачи о максимальном количестве контактов на сфере для $N \leq 6$ и $N = 12$. Разберем теперь случаи $7 \leq N \leq 11$.

Множество с максимальным количеством контактов не обязано быть из J_N , т. е. его контактный граф не обязан быть неприводимым. Обозначим через I_N множество состоящее из вершин правильного икосаэдра на сфере из которых удалено $12 - N$ соседних вершин. Это означает, что I_{11} это множество вершин икосаэдра без одной вершины, I_{10} - множество I_{12} из которого удалены две вершины соединенные ребром, а I_9 это вершины икосаэдра без трех вершин, лежащих на одной грани. Несложно видеть, что $e(I_N) = 3N - 9$ при $N < 11$.

Поскольку $e(I_{10}) = 21$, то $K_{10} \geq 21$. С другой стороны, в таблице 7.5 - неприводимых графов для $N = 10$, графами с наибольшим числом ребер являются 7.5.28 и 7.5.29 с $e = 20$. (Заметим, что эти графы, полученные удалением двух не соседних вершин

икосаэдра, не являются максимальными для задачи Таммеса.) Следовательно, при $N = 10$ максимальное число ребер достигается на графе, который является приводимым.

Определим еще одну величину K_N^* - максимальное число ребер у контактного неприводимого графа с N вершинами,

$$K_N^* := \max_{X \in J_N} e(X).$$

Теорема 5.2. 1. $K_7^* = K_7 = 12$;

2. $K_8^* = K_8 = 16$;

3. $K_9^* = K_9 = 18$;

4. $K_{10}^* = 20$, $K_{10} = 21$;

5. $K_{11}^* = K_{11} = 25$.

Доказательство теоремы следует из двух лемм о контактных графах.

Лемма 5.2. Пусть X - конечное множество на сфере S^2 . Если любая грань контактного графа $CG(X)$ является треугольником или четырехугольником, то этот граф неприводим.

Доказательство. Заметим, что граф $CG(X)$ на сфере является приводимым если у него найдется невыпуклая грань. Однако, у контактного графа все грани являются равносторонними, и в нашем случае это либо равносторонний треугольник, либо ромб. В обоих случаях это выпуклые многоугольники. \square

Лемма 5.3. Пусть $X \subset S^2$ и $|X| = N$, $N > 6$. Предположим, что $e(X) \geq 3N - 8$. Тогда контактный граф $CG(X)$ является неприводимым.

Доказательство. Из формулы Эйлера следует, что у графа с N вершинами на сфере, все грани которого являются треугольниками, число ребер e равно $3N - 6$. По условию $e = 3N - 6$, $3N - 7$ или $3N - 8$. В первом случае, у нас все грани треугольные, а во втором одна из граней четырехугольная. В обоих случаях Лемма 5.2 доказывает неприводимость контактного графа.

Остается третий случай, когда $e = 3N - 8$. Здесь возможно два подслучая: либо имеется ровно две четырехугольных грани, но тогда опять можно применить Лемму 5.2, либо одна пятиугольная грань $ABCDE$.

Предположим, что граф $CG(X)$ приводим. Тогда сферический равносторонний пятиугольник $ABCDE$ невыпуклый. Без ограничения общности, можно считать, что внутренний угол вершины A больше или равен 180° , а все остальные углы меньше 180° . Тогда A может быть соединено ребром только с одной вершиной F . Это следует из того факта, что все углы больше 60° и в случае если бы были еще вершины, кроме F , B и E , соединенные с A , то внешний угол A был бы больше 180° . Поскольку все грани

$CG(X)$, кроме $ABCDE$, - треугольные, то все грани, которые сходятся в вершине F являются треугольниками и F соединена ребрами с B и E , см. рисунок.

Предположим, что степень вершины F равна m . Тогда $m = 3, 4$ или 5 . Из этого следует, что углы треугольных граней соответственно равны 120° , 90° или 72° . Первых двух случаев не может быть при $N > 6$, а в третьем – треугольные грани будут такими же как у правильного икосаэдра. Тогда, все внутренние углы пятиугольника $FBCDE$ равны 144° , а стало быть и вершина A соединена с вершинами C и D . Это противоречие завершает доказательство леммы. \square

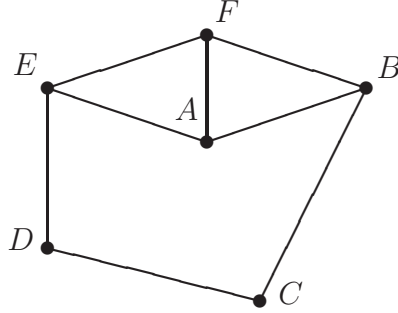


Рис. Случай, когда $ABCDE$ невыпуклый.

Доказательство. Докажем теперь теорему. При $N = 8$ и $N = 11$ у графов 7.3.4 и 7.6.22 число ребер равно $3N - 8$. Тогда Лемма 5.3 гарантирует, что контактный граф с максимальным числом ребер является неприводимым и поэтому $K_N = K_N^*$. В этих случаях, множества с максимальным количеством контактов единственны с точностью до изометрии.

Для оставшихся N множества I_N дают примеры контактных графов с $3N - 9$ ребрами. (Более того, для $N = 7$ и $N = 9$ у максимальных графов 7.2.2 и 7.4.7 тоже $3N - 9$ ребер.) Докажем, что это правильный ответ. От противного, если предположить что у контактных графов бывает больше ребер, т. е. $e(X) \geq 3N - 8$, то по Лемме 5.3 графы $CG(X)$ являются неприводимыми. Однако, в таблицах 7.2, 7.4 и 7.5 графов с таким числом ребер нет. \square

6 Задачи о неприводимых контактных графах

В работе Л. Данцера [12] имеется множество открытых вопросов, связанных с неприводимыми и Д-неприводимыми контактными графами. Наши работы [27, 28, 29] тоже поднимают большое число вопросов. Остановимся на некоторых из них.

Зафиксируем абстрактный граф G . Предположим, что найдется такое множество $X \subset \mathbb{S}^2$, что его контактный граф является неприводимым и изоморфен G . Возможны два варианта:

(i) множество X единственное с точностью до изометрии;

(ii) имеется степень свободы для X , т. е. на сфере существует k -параметрическое семейство множеств X с $k \geq 1$.

Доказано, что для $6 \leq N \leq 14$ и $N = 24$ к (i) типу относятся максимальные графы (т. е. контактные графы, задающие решение проблемы Таммеса). Возникает вопрос:

1. Верно ли, что все максимальные графы лежат в классе (i)?

Этот вопрос можно усилить. Мы уже отмечали, что в торической проблеме Таммеса при $N = 7$ оказалось, что имеется три неизоморфных максимальных графа [26].

2. Верно ли, что на сфере для заданного $N > 5$ имеется единственный (с точностью до изоморфизма) максимальный граф?

Для $6 \leq N \leq 10$, $N = 13$ и $N = 14$ максимальные графы получаются из графов типа (ii) добавлением ребер. Вместе с тем, для $N = 11, 12$ максимальные графы изолированы и не получаются таким образом. В связи с этим появляется такой вопрос:

3. Являются ли случаи $N = 11, 12$ исключением и все остальные максимальные графы получаются из класса (ii)?

Заметим, что в классе (i) лежат не только максимальные графы. Например, к нему относятся графы 7.5.11, 7.5.21, 7.5.28, 7.5.29, 7.6.1, 7.6.5, 7.6.6, 7.6.15 и еще несколько графов из таблицы 7.6. Однако, большинство графов обладают степенью свободы. Л. Данцер [12, р. 21] обсуждая графы типа (ii), отмечает, что во всех рассмотренных им примерах, меняя параметры так, чтобы увеличивалось $d = \psi(X)$ мы достигнем максимума, когда к графу добавятся новые ребра. Однако, далее он пишет, что не решается сформулировать это наблюдение в качестве гипотезы. А мы все-таки зададим вопрос:

4. Пусть граф G относится к классу (ii). Предположим, что $X \subset \mathbb{S}^2$ такое, что $\text{CG}(X) = G$. Верно ли, что можно немного так изменить X на X' , что $\text{CG}(X') = G$ и $\psi(X') > \psi(X)$?

По крайней мере, на один из вопросов Данцера [12, Question 5, р. 65] мы можем ответить. Он спрашивает: “Имеется ли на сфере такое множество X , что $|X| < 12$, $\text{CG}(X)$ является неприводимым контактным графом и $\psi(X) < d_{12} = \arccos 1/\sqrt{5}$?”

Дело в том, что среди рассмотренных Данцером Д-неприводимых графов таких не оказалось. Однако, в нашем списке графы с $\psi(X) < d_{12}$ появляются уже при $N = 9$. Это граф 7.4.3. Таких графов много для $N = 10$ и такие все, кроме максимального, для $N = 11$.

Поскольку максимальный граф является неприводимым, то

$$d_N = \max_{X \in J_N} \psi(X).$$

Рассмотрим теперь и минимум.

$$\delta_N = \min_{X \in J_N} \psi(X).$$

Тогда вопрос Данцера можно переформулировать как: “Найти минимальное N при котором $\delta_N < d_{12}$.” (Ответ на этот вопрос, как мы отмечали выше, $N = 9$.) По аналогии с проблемой Таммеса здесь возникает такая задача

5. *Найти все N -точечные конфигурации X на \mathbb{S}^2 , чтобы $\psi(X) = \delta_N$.*

Таблицы 7.1–7.6 позволяют ответить на этот вопрос для $N < 12$, но поскольку d_{min} там найдены численно, необходим более детальный геометрический анализ минимальных конфигураций.

В предыдущем разделе мы рассматривали K_N^* – максимальное число ребер у неприводимого контактного графы, а здесь мы рассмотрим минимальное число ребер.

6. *Найти нижние оценки на величину κ_N , где*

$$\kappa_N := \min_{X \in J_N} e(X).$$

Из таблиц 7.1–7.6 вытекает следующая теорема:

Теорема 6.1. 1. $\kappa_6 = 9$;

2. $\kappa_7 = 11$;

3. $\kappa_8 = 12$;

4. $\kappa_9 = 12$;

5. $\kappa_{10} = 14$;

6. $\kappa_{11} = 15$.

В заключение, остановимся еще на одной задаче из списка Данцера [12, р. 64]. Пусть точки $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ заданы сферическими координатами (θ_i, φ_i) . Без ограничения общности можно считать, что $\theta_1 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$. Тогда сферические координаты задают пространство конфигураций Π_N размерности $2N - 3$.

Поскольку, для каждого X на сфере у нас определена величина $\psi(X)$, то задана функция $\psi : \Pi_N \rightarrow \mathbb{R}$. Возникает вопрос:

7. *Найти условия при которых X является максимумом функции ψ на Π_N .*

Нам кажется, что эта задача довольно сложная.

7 Приложение: Список всех неприводимых контактных графов для $N \leq 11$

Приведем здесь основной результат нашей работы [28].

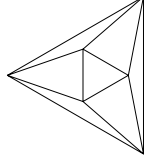
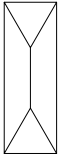
Теорема 7.1. *Список всех неприводимых контактных графов для $N = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ на сфере \mathbb{S}^2 приводится в таблицах 7.1–7.6.*

В таблицах * означает, что соответствующий неприводимый граф является также и Д-неприводимым, а ** означает, что этот граф - максимальный. Заметим, что Л. Данцер перечислил Д-неприводимые графы до $N = 10$, и поэтому в таблице для $N = 11$ у нас не отмечены Д-неприводимые графы.

В таблицах также показаны и предельные значения d , $d_{min} \leq d \leq d_{max}$. (Однако, отметим, что величины d_{min} и d_{max} найдены численно и могут немного отличаться от истинных.)

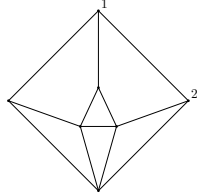
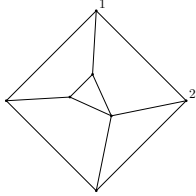
7.1 Неприводимые графы для 6 вершин.

N	d_{min}	d_{max}
1*	1.4274	1.5708
2**	1.5708	1.5708



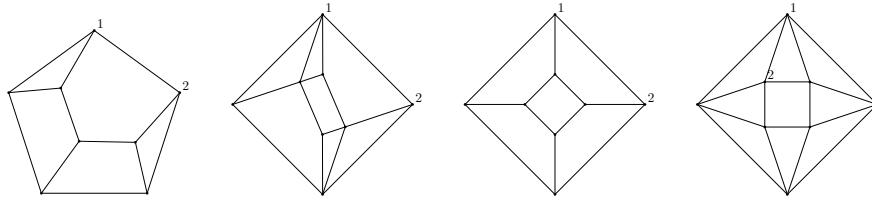
7.2 Неприводимые графы для 7 вершин.

N	d_{min}	d_{max}
1*	1.34978	1.35908
2**	1.35908	1.35908



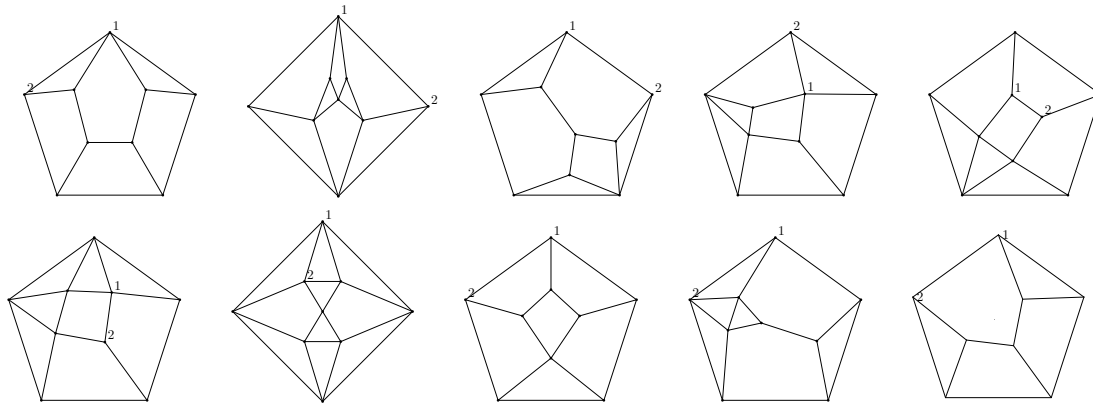
7.3 Неприводимые графы для 8 вершин.

N	d_{min}	d_{max}
1	1.17711	1.18349
2*	1.28619	1.30653
3*	1.23096	1.30653
4**	1.30653	1.30653



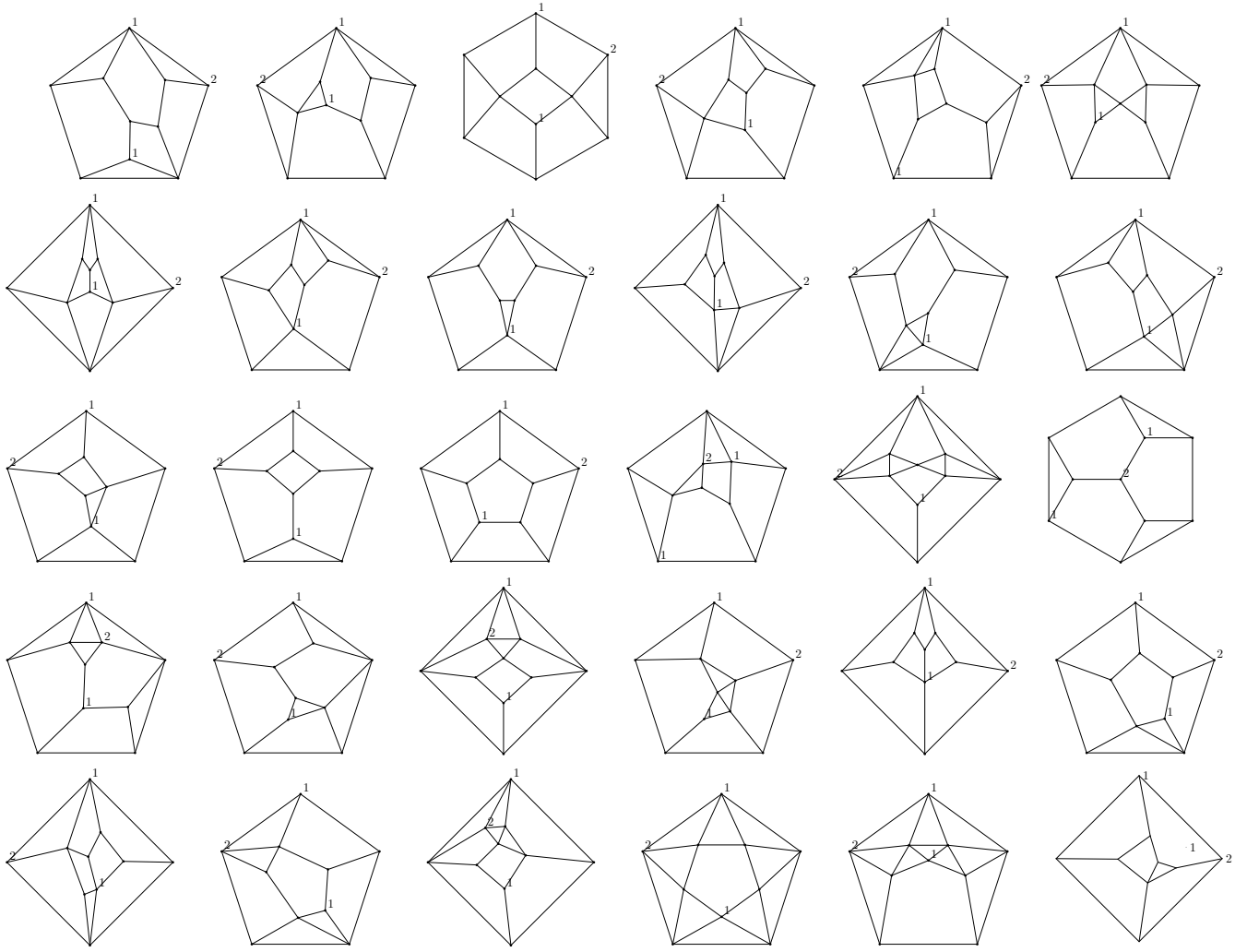
7.4 Неприводимые графы для 9 вершин.

N	d_{min}	d_{max}
1	1.14099	1.14143
2*	1.22308	1.23096
3	1.10525	1.14349
4	1.17906	1.18106
5	1.15448	1.17906
6	1.17906	1.17906
7 * *	1.23096	1.23096
8	1.15032	1.18106
9*	1.10715	1.14342
10	1.17906	1.18428



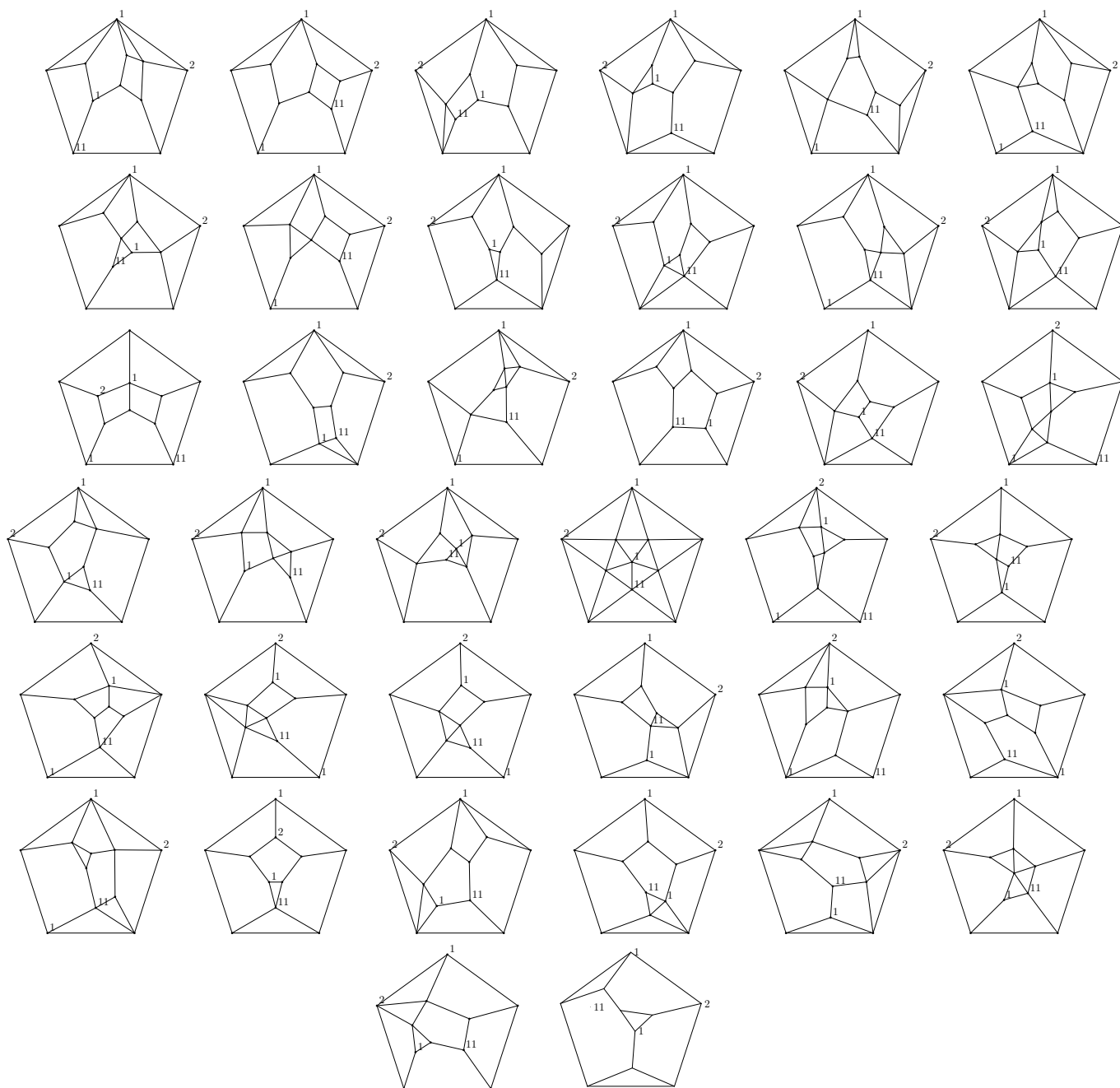
7.5 Неприводимые графы для 10 вершин.

N	d_{min}	d_{max}	N	d_{min}	d_{max}
1	1.0839	1.09751	2	1.08161	1.08439
3	1.03067	1.04695	4	1.10715	1.0988
5	1.07529	1.09431	6	1.09386	1.12285
7*	1.15278	1.15448	8	1.10012	1.10801
9	1.06344	1.07834	10*	1.15074	1.15191
11	1.0843	1.08442	12	1.10055	1.10889
13	1.09504	1.10429	14	1.06032	1.09604
15	1.06278	1.1098	16	1.09567	1.10715
17 * *	1.15448	1.15448	18	0.99865	1.0467
19	1.0843	1.0844	20	1.08334	1.09547
21*	1.15341	1.15341	22	1.0988	1.10608
23*	1.14372	1.15191	24	1.09249	1.1098
25*	1.15191	1.15245	26	1.09658	1.10977
27*	1.15191	1.15191	28*	1.10715	1.10715
29*	1.10715	1.10715	30	1.15103	1.15341



7.6 Неприводимые графы для 11 вершин.

N	d_{min}	d_{max}	N	d_{min}	d_{max}	N	d_{min}	d_{max}	N	d_{min}	d_{max}
1	1.05601	1.05602	2	1.0538	1.05842	19	1.05386	1.05947	20	1.05846	1.05882
3	1.05834	1.05842	4	1.04765	1.05455	21	1.0632	1.0636	22 * *	1.10715	1.10715
5	1.06975	1.06974	6	1.06306	1.06308	23	1.05388	1.06537	24	1.05375	1.0737
7	1.0522	1.06131	8	1.06621	1.06846	25	1.06167	1.0636	26	1.06506	1.06673
9	1.0538	1.05531	10	1.0795	1.07961	27	1.04636	1.05882	28	1.05426	1.06822
11	1.05331	1.0737	12	1.07163	1.07197	29	1.07832	1.07836	30	1.07886	1.07962
13	1.0404	1.06635	14	1.04759	1.05637	31	1.05429	1.06105	32	1.00523	1.05671
15	1.06974	1.06974	16	1.02726	1.06117	33	1.061	1.06117	34	1.02751	1.05828
17	1.04712	1.06167	18	1.06043	1.06209	35	1.05447	1.06679	36	1.0561	1.05627
						37	1.05431	1.05827	38(iv)	1.0064	1.03613



Список литературы

- [1] M. Aigner and G.M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer, 1998 (first ed.) and 2002 (second ed.)
- [2] K. Anstreicher, The thirteen spheres: A new proof, Discrete Comput. Geom. **31**(2004), 613-625.

- [3] N. Arkus, V. N. Manoharan, and M. P. Brenner, Deriving Finite Sphere Packings, *SIAM J. Discrete Math.*, **25** (2011), 1860-1901.
- [4] K. Böröczky, The problem of Tammes for $n = 11$, *Studia. Sci. Math. Hungar.* **18** (1983) 165-171.
- [5] K. Böröczky, The Newton-Gregory problem revisited, In: *Discrete Geometry*, A. Bezdek (ed.), Dekker, 2003, 103-110.
- [6] K. Böröczky, L. Szabó, Arrangements of 13 points on a sphere, In: *Discrete Geometry*, A. Bezdek (ed.), Dekker, 2003, 111-184.
- [7] K. Böröczky, L. Szabó, Arrangements of 14, 15, 16 and 17 points on a sphere, *Studi. Sci. Math. Hung.* **40** (2003), 407-421.
- [8] P. Boyvalenkov, S. Dodunekov and O. R. Musin, A survey on the kissing numbers, *Serdica Mathematical Journal*, **38** (2012), 507-522.
- [9] P. Brass, W.O.J. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, 2005.
- [10] G. Brinkmann and B. D. McKay, Fast generation of planar graphs (expanded edition), <http://cs.anu.edu.au/~bdm/papers/plantri-full.pdf>
- [11] A. Donev, S. Torquato, F. H. Stillinger, and R. Connelly, Jamming in Hard Sphere and Disk Packings, *Journal of Applied Physics*, 95, 989-999 (2004).
- [12] L. Danzer, Finite point-sets on S^2 with minimum distance as large as possible, *Discr. Math.*, **60** (1986), 3-66.
- [13] L. Fejes Tóth, Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Jber. Deutch. Math. Verein.* **53** (1943), 66-68.
- [14] Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматлит, 1958.
- [15] L. Flatley, A. Tarasov, M. Taylor, and F. Theil. Packing twelve spherical caps to maximize tangencies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **254** (2013), 220-225.
- [16] W. Habicht und B.L. van der Waerden, Lagerungen von Punkten auf der Kugel, *Math. Ann.* **123** (1951), 223-234.
- [17] A. B. Hopkins, F. H. Stillinger, and S. Torquato, Densest Local Sphere-Packing Diversity: General concepts and application to two dimensions, *Physical Review E*, 81, 041305 (2010).

- [18] W.-Y. Hsiang, Least action principle of crystal formation of dense packing type and Kepler's conjecture, World Scientific, 2001.
- [19] J. Leech, The problem of the thirteen spheres, *Math. Gazette* **41** (1956), 22-23.
- [20] H. Maehara, Isoperimetric theorem for spherical polygons and the problem of 13 spheres, *Ryukyu Math. J.*, **14** (2001), 41-57.
- [21] H. Maehara, The problem of thirteen spheres - a proof for undergraduates, *European Journal of Combinatorics*, **28** (2007), 1770-1778.
- [22] О. Р. Мусин, Проблема двадцати пяти сфер, *УМН*, **58:4** (2003), 153-154.
- [23] O. R. Musin, The kissing problem in three dimensions, *Discrete Comput. Geom.*, **35** (2006), 375-384.
- [24] O. R. Musin, The one-sided kissing number in four dimensions, *Periodica Math. Hungar.*, **53** (2006), 209-225.
- [25] O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, *Ann. of Math.*, **168** (2008), 1-32.
- [26] O. R. Musin and A. V. Nikitenko, Optimal packings of congruent circles on a square flat torus, *Arxiv e-prints*, arXiv:1212.0649.
- [27] O. R. Musin and A. S. Tarasov, The Strong Thirteen Spheres Problem, *Discrete & Comput. Geom.*, **48** (2012), 128-141.
- [28] О. Р. Мусин, А. С. Тарасов, Перечисление неприводимых контактных графов на сфере, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18:2** (2013), 125-145.
- [29] O. R. Musin and A. S. Tarasov, The Tammes problem for $N=14$
- [30] plantri and fullgen, <http://cs.anu.edu.au/bdm/plantri/>
- [31] R.M. Robinson, Arrangement of 24 circles on a sphere, *Math. Ann.* **144** (1961), 17-48.
- [32] K. Schütte and B.L. v. d. Waerden, Auf welcher Kugel haben 5,6,7,8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? *Math. Ann.* **123** (1951), 96-124.
- [33] K. Schütte and B.L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* **125** (1953), 325-334.
- [34] R.M.L. Tammes, On the Origin Number and Arrangement of the Places of Exits on the Surface of Pollengrains, *Rec. Trav. Bot. Neerl.* **27** (1930), 1-84.
- [35] B.L. van der Waerden, Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze, *Math. Ann.* **125** (1952) 213-222.

О. Р. Мусин, ИППИ РАН и УТБ (University of Texas at Brownsville).

E-mail: oleg.musin@utb.edu

А. С. Тарасов, ИППИ РАН

E-mail: tarasov.alexey@gmail.com